

Опыт моделирования гидрофизических процессов в Азовском море



20 Опыт моделирования гидрофизических процессов в Азовском море

В работе представлены параллельный метод и численные результаты моделирования гидродинамических процессов в Азовском море на основе программного комплекса «Azov3D», созданного в ТТИ ЮФУ. Для построенного параллельного алгоритма выполнены теоретические и экспериментальные оценки ускорения и эффективности.

АВТОРЫ:

А.И. Сухинов – докт. физ.-мат.наук., профессор, руководитель ТТИ ЮФУ (Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге),

e-mail: sukhinov@gmail.com

В.Ф. Тишкин – докт. физ.-мат.наук., профессор, зам. директора по научной работе ИПМ им. Келдыша (Институт прикладной математики г. Москва),

e-mail: v.f.tishkin@gmail.com

К.А. Иванов – канд. физ.-мат.наук., доцент, ТТИ ЮФУ (Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге),

Д.В. Лапин – начальник отдела математического моделирования и вычислительного эксперимента центра коллективного пользования супервычислительными ресурсами ТТИ ЮФУ (Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге),

e-mail: dmitri.lapin@gmail.com

А.Е. Чистяков – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТТИ ЮФУ (Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге),

e-mail: cheese_05@mail.ru

Разделы «Основные характеристики вычислительной системы» и «Вычислительное поле» см. в предыдущей статье («Опыт решения задач аэродинамики на супервычислительной системе ТТИ ЮФУ»).

Моделирование гидрофизических процессов в Азовском море

Уравнения модели движения жидкости рассматриваются в прямоугольной области геоинформационной системы Азовского моря. Математическая модель движения водной среды в мелководных водоемах [4] учитывает такие физические параметры, как сила Кориолиса, турбулентный обмен, испарение, стоки рек, ветровое напряжение, трение о дно, сложный рельеф дна и геометрию береговой линии, а также динамическое изменение расчетной области при сгонно-нагонных процессах. При построении дискретных математических моделей гидродинамики учитывалась «заполненность» контрольных ячеек, что позволяет повысить реальную точность решения в случае сложной геометрии исследуемой области за счет улучшения аппроксимации границы. Для решения задачи гидродинамики использовался метод поправки к давлению [6]. Вариант метода поправки к давлению в случае переменной плотности примет вид:

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z = (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \quad (1)$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u\sin\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (v\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u\cos\theta, \quad (3)$$

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}, \quad (4)$$

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_x, \quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_y, \quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_z, \quad (5)$$

где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости, $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}, \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ – компоненты полей вектора скорости на следующем и промежуточном временных слоях соответственно, $\bar{u} = (\tilde{u} + u)/2$, p – превышение поля

давления над гидростатическим, ρ – плотность водной среды, Ω – угловая скорость вращения Земли, θ – угол между вектором угловой скорости и вертикалью, μ, ν – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена. Оси Ox и Oy имеют горизонтальные направления с запада на восток и с севера на юг соответственно. Ось Oz направлена вертикально вниз. Система уравнений (1)–(5) рассматривается при соответствующих граничных и начальных условиях.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности задаются по закону Ван-Дорна:

$$\tau_x = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_x |\vec{w}|, \quad \tau_y = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_y |\vec{w}|,$$

где \vec{w} – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы, $C_p (|\vec{w}|)$ – безразмерный коэффициент.

Рассмотренная ниже аппроксимация позволяет на основании измеренных пульсаций скоростей строить коэффициент вертикального турбулентного обмена, неоднородный по глубине [7]:

$$\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2}, \quad (6)$$

где \bar{U}, \bar{V} – осредненные по времени пульсации горизонтальных компонент скорости, Δ – характерный масштаб сетки, C_s – безразмерная эмпирическая константа, значение которой обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

Метод решения сеточных уравнений

Дискретные аналоги системы уравнений (1)–(4) решаются адаптивным модифицированным попеременно-треугольным методом вариационного типа [1–3].

После дискретизации задачу можно записать в матричном виде:

$$Ax = f, \quad A: H \rightarrow H, \quad (7)$$

где A – линейный, положительно определенный оператор ($A > 0$).

Для нахождения решения задачи (7) будем использовать неявный итерационный процесс:

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f, \quad B: H \rightarrow H. \quad (8)$$

В уравнении (8) m – номер итерации, $\tau > 0$ – итерационный параметр, B – некоторый обратимый оператор. Обращение оператора B в (8) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (7). При построении B будем исходить из аддитивного представления оператора A_0 – симметричной части оператора A :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2. \quad (9)$$

Оператор-переобуславливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1) D^{-1} (D + \omega R_2), \quad D = D > 0, \quad \omega > 0, \quad y \in H, \quad (10)$$

где D – некоторый самосопряженный ($D^* = D$) положительно определенный ($D > 0$) оператор.

Соотношения (9)–(10) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) решения задачи, если определены операторы R_1, R_2 и указаны способы определения параметров t, w и оператора D .

Алгоритм адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет вид:

$$r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m) w^m = r^m, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2 w^m, R_2 w^m)}}, \quad (11)$$

где r^m – вектор невязки, w^m – вектор поправки, в качестве оператора D используется диагональная часть оператора A .

$$s_m^2 = 1 - \frac{(A_0 w^m, w^m)^2}{(B^{-1} A_0 w^m, A_0 w^m)(B w^m, w^m)}, \quad k_m = \frac{(B^{-1} A_1 w^m, A_1 w^m)}{(B^{-1} A_0 w^m, A_0 w^m)},$$

$$\theta_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{s_m^2 k_m}{(1 + k_m)}}}{1 + k_m (1 - s_m^2)},$$

$$\tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0 w^m, w^m)}{(B^{-1} A_0 w^m, A_0 w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m, \quad \omega_{m+1} = \tilde{\omega}_m,$$

Параллельная реализация

Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем [5]. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каждый процессор получает свою расчетную

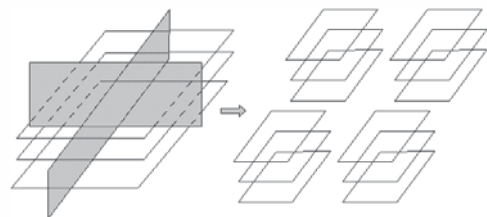


Рис. 1.
Декомпозиция области

область, как показано на рис. 1, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению перпендикулярному плоскости разбиения.

После того, как каждый процессор получит свою часть области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент вектора невязки и передает его значение каждому процессору. Теперь

для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1) D^{-1} (D + \omega_m R_2) w^m = r^m,$$

где R_1 – нижне-треугольная матрица, R_2 – верхне-треугольная матрица. Для этого решим последовательно системы:

$$(D + \omega_m R_1) y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2) w^m = D y^m.$$

Вначале вычисляется вектор y^m , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки w^m . Схема расчета вектора y^m изображена на рис. 2.

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи – первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на рис. 2. В схеме для расчета вектора y^m только первый процессор не требует дополнительной информации и может независи-

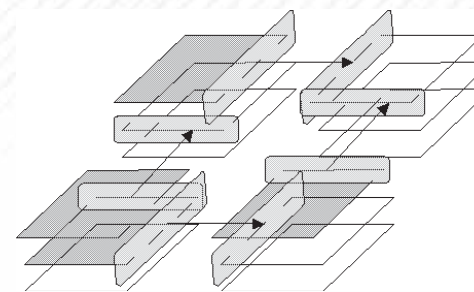


Рис. 2.
Схема для расчета вектора y^m . Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором

мо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить систему линейных алгебраических уравнений с верхне-треугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения (11) и выполняется переход на следующий итерационный слой.

Проведенные численные эксперименты показали, что максимальное ускорение для задачи размерностью $351 \times 251 \times 46$ достигалось на 128 процессорах и было равно 43,6. Получены теоретические оценки ускорения и эффективности для данного алгоритма. На рис. 3 изображены графики зависимости ускорения от количества процессоров, рассчитанные теоретически и экспериментально.

В теоретических оценках ускорения рассматривается случай модельной задачи с прямоугольной областью. При решении задачи для реального водоема расчетная область имеет сложную форму, при этом реальное ускорение меньше его теоретической оценки. Из рис. 3 видно, что обе кривые проходят достаточно близко друг к другу, т.е. зависимость ускорения, полученную при теоретической оценке, можно использовать в качестве оценки сверху ускорения для параллельной реализации алгоритма адаптивного МПТМ, полученной на основе декомпозиции области по двум пространственным направлениям.

На рис. 4 приведены картины течения через 24 часа после возникновения западного ветра интенсивностью 5 м/с. Палитрой показана интенсивность течения. Линии соответствуют изолиниям глубин.

Выводы

В работе представлены параллельный метод и численные результаты моделирования гидродинамических процессов в Азовском море на основе программного комплекса Azov3D. Отличительными особенностями разрабатываемых алгоритмов являются: высокая производительность, достоверность

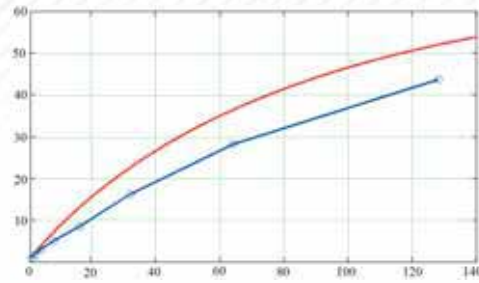


Рис. 3.
Зависимость ускорения от числа процессоров.
Гладкая кривая – теоретическая зависимость,
ломаная – экспериментальная

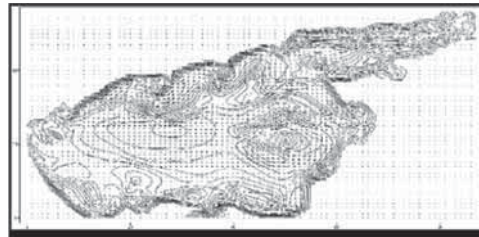


Рис. 4.
Поле вектора скорости движения водной среды
(баротропные течения)

слагаемых и нефизичных источников поля возникающих в результате конечно-разностных аппроксимаций.

и точность получаемых результатов. Высокая производительность достигается за счет использования эффективных численных методов решения сеточных уравнений ориентированных для применения на высокопроизводительных вычислительных системах. Достоверность достигается за счет учета определяющих физических факторов, таких как сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, а также за счет учета отклонения значения поля давления от гидростатического приближения. Точность достигается применением подробных расчетных сеток, учитывающих степень «заполненности» расчетных ячеек, а также высоким порядком точности погрешности аппроксимации, отсутствием неконсервативных диссипативных

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. Сухинов А.И. Модифицированный попеременно-треугольный метод для задач теплопроводности и фильтрации // Вычислительные системы и алгоритмы. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984. – С. 52–59.
3. Коновалов А.Н. К теории переменного-треугольного итерационного метода // Сиб. мат. журнал. – 2002. – 43:3. – С. 552–572.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе. Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 3. – С. 3–21.
5. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. – 2010. – № 6 (107). – С. 237–249.
6. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – 15:1. – С. 197–207.
7. Белоцерковский О.М. Турбулентность: новые подходы. – М.: Наука, 2003.